

KRT.

MONTAGEBYGGERI
5

DANSK INGENIØRFORENING · BYGGERATIONALISERINGSUDVALGET

MONTAGEBYGGERI

PUBLIKATION NR.

5

KONCENTREREDE BELASTNINGER

KONCENTREREDE BELASTNINGER PÅ BJÆLKER

Concentrated Loads on Beams

B. HØJLUND RASMUSSEN OG

KAI NOMMESEN *Civilingeniører*

*Arbejdet er tidligere offentliggjort i
„Bygningsstatiske Meddelelser“, 1956, side 199.*

ARBEJDSUDVALG 3 KØBENHAVN 1956

I KOMMISSION HOS TEKNISK FORLAG

LABORATORIET FOR BYGNINGSTEKNIK

I henhold til lov nr. 209 af 7. juni 1952 har boligministeriet af midlerne til teknisk-videnskabelig forsknings- og forsøgsvirksomhed stillet 194.000 kr. til rådighed for Dansk Ingeniørforening til brug for et udvalg vedrørende BYGGERIETS RATIONALISERING, især MONTAGEBYGGERI.

Denne publikation er en del af udvalgets arbejde i årene 1954-57.

Arbejdet har været fordelt på nedenstående udvalg:

Hovedudvalg

- Arbejdsudvalg 1. Montagebyggeriets nuværende stade.
- Arbejdsudvalg 2. Facadeelementers rationelle opbygning og virkemåde.
- Arbejdsudvalg 3. Statiske problemer i montagebyggeri.
- Arbejdsudvalg 4. Fuger, tolerancer og installationer.

Udvalgsmedlemmer:

Medlem af udvalg:

Civilingeniør POVL R. ANDERSEN, formand for udvalg 4	Hovedudvalg, 2, 4
arkitekt PH. ARGANDER, M.A.A.	Hovedudvalg, 1
underdirektør, civilingeniør J. CHRISTOFFERSEN	3
civilingeniør P. M. FREDERIKSEN	4
direktør, civilingeniør JOH. HARTMANN	1
arkitekt EDV. HEIBERG, M.A.A.	4
civilingeniør W. JØNSSON	3
civilingeniør JOHS. JØRGENSEN	1
civilingeniør C. C. KIRCHHEINER	2
professor P. KJÆRGAARD, M.A.A.	4
civilingeniør V. KORSGAARD	2
arkitekt ESKE KRISTENSEN, M.A.A.	Hovedudvalg, 1, 2
civilingeniør A. K. KROG	2
civilingeniør P. E. MALMSTRØM, formand for hovedudvalget	Hovedudvalg
civilingeniør, dr. phil. P. W. MARKE	2
civilingeniør E. PHAFF MØRCK	4
civilingeniør EW. OLSEN	4
civilingeniør E. C. PEDERSEN	Hovedudvalg, 1
professor, dr. techn. B. J. RAMBØLL, formand for udvalg 3	Hovedudvalg, 3, 4
civilingeniør B. HØJLUND RASMUSSEN	Hovedudvalg, 3
civilingeniør SØREN RASMUSSEN	Hovedudvalg, 3
civilingeniør W. R. SIMONSEN, formand for udvalg 1	Hovedudvalg, 1
civilingeniør H. C. E. TEISEN	4
ingeniør J. THORSEN, M. af I.	4
civilingeniør V. USSING, formand for udvalg 2	Hovedudvalg, 2, 3
arkitekt M. VOLTELEN, M.A.A.	4
civilingeniør J. N. M. WÆRUM	1
civilingeniør JOHS. F. MUNCH-PETERSEN, sekretær for	Hovedudvalg, 1, 2, 4

I udvalgenes arbejde har endvidere deltaget civilingeniørerne M. EGESKJOLD (2), JØRN LUND (2), H. O. SONNE ANDERSEN (3), K. NOMMESEN (3), FL. MØLLER (4) samt nogle polyteknikere ved løsning af specielle opgaver.

**Arbejdsudvalg 3.
Statiske problemer i montagebyggeri.**

**KONCENTREREDE BELASTNINGER PÅ BJÆLKER MED
REKTANGULÆRT, KONSTANT TVÆRSNIT**

Af

Bent Højlund Rasmussen og Kai Nommesen
Civilingeniører

I montagebyggeri er det ofte ønskeligt at kunne tillade store lejetryk ved oplægning af elementer på hinanden.

Ved fastsættelsen af det tilladelige lejetryk har det interesse at kende spændingstilstanden i omegnen af lejepladen.

Denne publikation, som er en del af udvalgets arbejde i årene 1954-1957, er et forsøg på at opstille en metode til beregning af denne spændingstilstand.

* * *

Dette arbejde er publiceret i samarbejde med Dansk Selskab for Bygningsstatik og offentliggjort i Bygningsstatiske Meddelelser, 1956, side 199-238.

KONCENTREREDE BELASTNINGER PÅ BJÆLKER MED REKTANGULÆRT, KONSTANT TVÆRSNIT

Af

BENT HØJLUND RASMUSSEN og KAI NOMMESEN

UDK 624.072.2

Indledning.

Ved beregningen af spændingerne i bjælker med rektangulært, konstant tværsnit benytter man, som bekendt, i almindelighed den simple bjælketekori, idet man sætter normalspændingen:

$$(1) \quad \sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M}{I} y$$

og forskydningsspændingen:

$$(2) \quad \tau_{xy} = \frac{3 T}{2 F} \left[1 - \left(\frac{y}{c} \right)^2 \right]$$

hvor c er tværsnittets halve højde.

Forskellen mellem denne simple løsning og den nøjagtige løsning efter elasticitetsteorien er meget ringe, når belastningsintensiteten på bjælken er lille i forhold til spændingerne σ_x og τ_{xy} , og når det betragtede punkt ligger tilstrækkeligt langt fra bjælkens ender (hvilket i praksis vil sige i en afstand omtrent lig bjælkehøjden).

Dersom disse forudsætninger ikke er opfyldt, kan σ_x og τ_{xy} imidlertid afvige ret stærkt fra de ved (1) og (2) beregnede størrelser, og σ_y , normalspændingen i et vandret snit, som normalt anses for at være forsvindende, kan få en betydelig indflydelse på spændingstilstanden.

Således kan f. eks. spændingstilstanden i omegnen af bjælkens leje-flader ikke bestemmes ved hjælp af (1) og (2), da i almindelighed ingen af de to ovenfor omtalte forudsætninger er til stede.

En nøjagtig bestemmelse af spændinger (og deformationer) efter elasticitetsteorien er i næsten alle tilfælde uigennemførlig, om end den må formodes at have praktisk betydning ved dimensionering af jernbetonbjælker, da betonen, navnlig når den er under trækspændinger, nærmest opfører sig elastisk helt op imod brud.

I det følgende er der gjort forsøg på at opstille en tilnærmelsesmetode, der uden at være alt for indviklet tager rimeligt hensyn til den måde, på hvilken belastningen overføres til bjælken, og der er gennemregnet et par eksempler, for hvilke man i forvejen, eksakt eller tilnærmet, kender løsningen.

Den betragtede bjælke er vist på fig. 1. Den har bredden 1 og højden $2c$, og vi indlægger et koordinatsystem med x -aksen beliggende midt i bjælken parallelt med bjælkens længderetning og med y -aksen pegende lodret nedad.

Vi tænker os foreløbig, at det betragtede punkt ligger langt fra bjælkens endeflader, og at bjælken på over- og undersiden er belastet med de viste normale og tangentielle belastningsintensiteter $\sigma_o(x)$, $\sigma_u(x)$, $\tau_o(x)$ og $\tau_u(x)$, medens side- og endeflader er ubelastede.

$\sigma_o(x)$ o. s. v. antages at være jævnt fordelte over bjælkebredden, således at spændingstilstanden er todimensional.

Spændingerne skal nu først og fremmest tilfredsstillende ligevægtsbetingelserne:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} = 0 \\ \frac{\delta \sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} = 0 \end{cases}$$

der umiddelbart kan aflæses af fig. 2, af hvilken fortegnsdefinitionerne for spændingerne også fremgår.

Det bemærkes, at vi ved opstillingen af (3) har set bort fra massekræfterne, der for slanke bjælker som regel er forsvindende.

Endvidere skal de opfylde randbetingelserne ved bjælkens over- og underside:

$$(4) \quad \begin{cases} \sigma_y = \begin{cases} \sigma_o(x) & \text{for } y = -c \\ \sigma_u(x) & \text{for } y = c \end{cases} \\ \tau_{xy} = \begin{cases} \tau_o(x) & \text{for } y = -c \\ \tau_u(x) & \text{for } y = c \end{cases} \end{cases}$$

hvis rigtighed kan indses ved at sammenligne fig. 1 og 2.

Randbetingelserne ved bjælkeenderne vil vi foreløbig lade ude af betragtning.

Ganske uafhængigt af, om vi vil finde spændingerne efter elasticitetsteorien, plasticitetsteorien eller en anden forudsætning om sammenhøringen mellem spændinger og deformationer, må spændingerne ubetinget tilfredsstillende ligningerne (3) og (4).

Endvidere må deformationerne i alle tilfælde tilfredsstillende den geometriske betingelse:

$$\frac{\delta^2 \epsilon_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \epsilon_y}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 \gamma_{xy}}{\delta x \delta y}$$

(se f. eks. [1], side 22, formel 21), der er nødvendig, for at kontinuiteten i legemet skal bevares.

Dersom vi nu forudsætter gyldigheden af Hooke's lov, kan den geometriske betingelse, idet vi yderligere benytter (3), bringes på formen:

$$(5) \quad \left[\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \right] (\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Blandt alle de spændingstilstande, der tilfredsstillende (3) og (4), og som således er teoretisk mulige ved en passende afhængighed mellem spændinger og deformationer, findes der een og kun een, der tilfredsstillende (5). Dette er den nøjagtige løsning efter elasticitetsteorien.

Opstilling af differentiaalligningerne til bestemmelse af spændingerne.

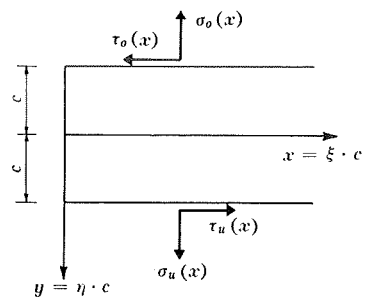


Fig. 1. Den ved udviklingen af formlerne (1)–(19) betragtede bjælke.

The beam considered by the development of the formulae (1) to (19).

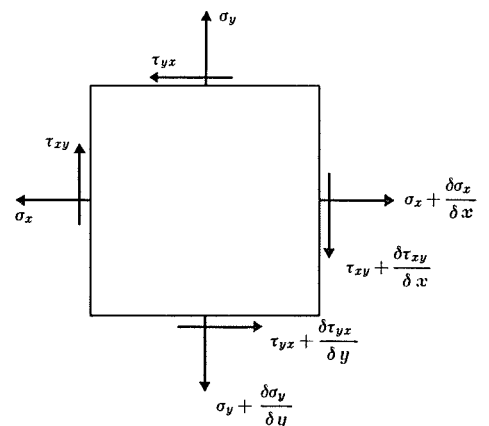


Fig. 2. Element af bjælken på fig. 1. Af figuren fremgår fortegnsdefinitionerne for spændingerne.

Element of beam shown on fig. 1. Sign convention for stresses appears from this figure.

Opstilling af en tilnærmelsesmetode, der blot tilfredsstiller ligevægtsbetingelserne og randbetingelserne for $y = \pm c$.

Vi vender nu tilbage til bjælken på fig. 1 og begynder med at finde snitkræfterne i snittet x konstant > 0 , idet vi tænker os snitkræfterne N_0 , T_0 og M_0 for $x = 0$ bekendte.

Vi finder umiddelbart:

$$(6) \quad \begin{cases} N = \int_0^x [\tau_o(z) - \tau_u(z)] dz + N_0 \\ T = \int_0^x [\sigma_o(z) - \sigma_u(z)] dz + T_0 \\ M = \int_0^x [(\sigma_o(z) - \sigma_u(z))(x-z) - (\tau_o(z) + \tau_u(z))c] dz + M_0 + T_0 x. \end{cases}$$

Vi får i det følgende brug for de afledede af disse snitkræfter efter x , eller rettere sagt efter ξ , idet vi for at få bekvemmere formler indfører de nye, dimensionsløse, uafhængige variable ξ og η ved hjælp af overgangsformlerne:

$$(7) \quad x = \xi c \quad y = \eta c.$$

Herefter finder vi ved at differentiere (6):

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dN}{d\xi} = c \frac{dN}{dx} = (\tau_o - \tau_u) c \\ \frac{dT}{d\xi} = c \frac{dT}{dx} = (\sigma_o - \sigma_u) c \\ \frac{dM}{d\xi} = c \frac{dM}{dx} = Tc - (\tau_o + \tau_u) c^2 \\ \frac{d^2M}{d\xi^2} = (\sigma_o - \sigma_u) c^2 - \frac{d}{d\xi} (\tau_o + \tau_u) c^2 \end{cases}$$

Tilnærmelsesløsningen σ_{1x} , σ_{1y} og τ_{1xy} fremkommer nu ved, at vi forudsætter σ_x lineært varierende, eller med andre ord sætter σ_{1x} lig σ_x ifølge (1).

Herefter kan τ_{1xy} og σ_{1y} bestemmes entydigt ved hjælp af (3) og (4).

$$(9) \quad \sigma_{1x} = \frac{N}{2c} + \frac{3M}{2c^2} \eta.$$

Ved hjælp af (8) finder vi:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \sigma_{1x}}{\delta \xi} &= \frac{1}{2} (\tau_o - \tau_u) + \frac{3}{2} \left[\frac{T}{c} - (\tau_o + \tau_u) \right] \eta \\ &= \frac{1}{2} (1 - 3\eta) \tau_o - \frac{1}{2} (1 + 3\eta) \tau_u + \frac{3T}{2c} \eta. \end{aligned}$$

Nu er ifølge (3) og (7):

$$\frac{\delta \tau_{1xy}}{\delta \eta} = - \frac{\delta \sigma_{1x}}{\delta \xi}.$$

Dersom vi integrerer og finder integrationskonstanten ved f. eks. at forlange $\tau_{xy} = \tau_o$ for $\eta = -1$, får vi automatisk opfyldt randbetingelsen $\tau_{xy} = \tau_u$ for $\eta = 1$, da vort udtryk (9) for σ_{1x} opfylder ligevægtsbetingelsen for snittet som helhed.

Vi finder:

$$(10) \quad \tau_{1xy} = -\frac{1}{4}(1 + 2\eta - 3\eta^2)\tau_o + \frac{1}{4}(-1 + 2\eta + 3\eta^2)\tau_u \\ + \frac{3}{4}(1 - \eta^2)\frac{T}{c}.$$

Ved hjælp af (8) finder vi:

$$\frac{\delta\tau_{1xy}}{\delta\xi} = -\frac{1}{4}(1 + 2\eta - 3\eta^2)\frac{d\tau_o}{d\xi} \\ + \frac{1}{4}(-1 + 2\eta + 3\eta^2)\frac{d\tau_u}{d\xi} + \frac{3}{4}(1 - \eta^2)(\sigma_o - \sigma_u)$$

Nu er iflg. (3) og (7):

$$\frac{\delta\sigma_{1y}}{\delta\eta} = -\frac{\delta\tau_{1xy}}{\delta\xi}$$

hvilket i forbindelse med (4) entydigt bestemmer σ_{1y} som

$$(11) \quad \sigma_{1y} = \frac{1}{4}(-1 + \eta + \eta^2 - \eta^3)\frac{d\tau_o}{d\xi} + \frac{1}{4}(1 + \eta - \eta^2 - \eta^3)\frac{d\tau_u}{d\xi} \\ + \frac{1}{4}(2 - 3\eta + \eta^3)\sigma_o + \frac{1}{4}(2 + 3\eta - \eta^3)\sigma_u$$

Spændingerne σ_{1x} , τ_{1xy} og σ_{1y} tilfredsstiller nu ligevægtsbetingelserne og randbetingelserne i ethvert punkt af bjælken undtagen evt. ved enderne, og de falder i øvrigt sammen med spændingerne σ_x og τ_{xy} ifølge (1) og (2), dersom belastningerne σ_o etc. er lig med nul i omegnen af det betragtede tværsnit.

Der vil derfor være grund til at håbe, at løsningen er nogenlunde rigtig, dersom belastningerne σ_o etc. er moderate i forhold til spændingerne σ_{1x} etc.

I de senere afsnit er gennemregnet nogle eksempler til belysning af dette forhold.

For at undersøge, om løsningen evt. er den rigtige efter elasticitetsteorien, danner vi jfr. (5) udtrykket

$$\left[\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2}\right](\sigma_{1x} + \sigma_{1y}) = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\delta^2}{\delta \xi^2} + \frac{\delta^2}{\delta \eta^2}\right](\sigma_{1x} + \sigma_{1y}):$$

$$\frac{\delta^2 \sigma_{1x}}{\delta \xi^2} = \frac{\delta^2 \sigma_{1y}}{\delta \eta^2} = \frac{1}{2} (1 - 3 \eta) \frac{d\tau_o}{d\xi} - \frac{1}{2} (1 + 3 \eta) \frac{d\tau_u}{d\xi} + \frac{3}{2} \eta (\sigma_o - \sigma_u)$$

$$\frac{\delta^2 \sigma_{1x}}{\delta \eta^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \sigma_{1y}}{\delta \xi^2} &= \frac{1}{4} (-1 + \eta + \eta^2 - \eta^3) \frac{d^3 \tau_o}{d\xi^3} \\ &+ \frac{1}{4} (1 + \eta - \eta^2 - \eta^3) \frac{d^3 \tau_u}{d\xi^3} + \frac{1}{4} (2 - 3 \eta + \eta^3) \frac{d^2 \sigma_o}{d\xi^2} \\ &+ \frac{1}{4} (2 + 3 \eta - \eta^3) \frac{d^2 \sigma_u}{d\xi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12) \quad \left[\frac{\delta^2}{\delta \xi^2} + \frac{\delta^2}{\delta \eta^2} \right] (\sigma_{1x} + \sigma_{1y}) &= 3 \eta (\sigma_o - \sigma_u) \\ &+ \frac{1}{4} (2 - 3 \eta + \eta^3) \frac{d^2 \sigma_o}{d\xi^2} + \frac{1}{4} (2 + 3 \eta - \eta^3) \frac{d^2 \sigma_u}{d\xi^2} \\ &+ (1 - 3 \eta) \frac{d\tau_o}{d\xi} - (1 + 3 \eta) \frac{d\tau_u}{d\xi} \\ &+ \frac{1}{4} (-1 + \eta + \eta^2 - \eta^3) \frac{d^3 \tau_o}{d\xi^3} + \frac{1}{4} (1 + \eta - \eta^2 - \eta^3) \frac{d^3 \tau_u}{d\xi^3}. \end{aligned}$$

Vor løsning er med andre ord helt rigtig, når τ_o og τ_u er konstante og $\sigma_o = \sigma_u = 0$.

* * *

Forbedring af tilnærmelsesløsningen.

Vi vil prøve at forbedre løsningen σ_{1x} etc. ved en korrektion σ_{2x} etc., der

- 1) opfylder ligevægtsligningerne (3),
- 2) ikke giver noget bidrag til de allerede tilfredsstillede randbetingelser (4),
- 3) såvidt muligt sammen med σ_{1x} etc. tilfredsstiller (5).

For simpelheds skyld sætter vi $\sigma_o = \tau_o = 0$, idet vi i givet fald let vil kunne finde korrektionen for en bjælke, der er belastet på oversiden, på lignende måde som nedenfor benyttet ved en bjælke, der er belastet på undersiden.

Som korrektion vælger vi udtryk af typen:

$$\left. \begin{aligned} (13) \quad \sigma_{2x} &= \sum \ddot{f}_i \sigma_u^{(i)} + \sum \ddot{g}_i \tau_u^{(i+1)} \\ (14) \quad \tau_{2xy} &= - \sum \dot{f}_i \sigma_u^{(i+1)} - \sum \dot{g}_i \tau_u^{(i+2)} \\ (15) \quad \sigma_{2y} &= \sum f_i \sigma_u^{(i+2)} + \sum g_i \tau_u^{(i+3)} \end{aligned} \right\} i = 0, 2, 4, \dots$$

Her er f_i og g_i funktioner af η alene, og prikkerne angiver differentiationer med hensyn til η .

$\sigma_u^{(i)}$ betyder $\frac{d^i \sigma_u}{d\xi^i}$ og analogt for $\tau_u^{(i)}$.

Vi ser umiddelbart ved prøve, at det til enhver værdi af i svarende bidrag til σ_{2x} etc. tilfredsstiller ligevægtsligningerne (3), og at det ikke får nogen indflydelse på randbetingelserne (4), dersom vi sætter:

$$(16) \quad f_i = \dot{f}_i = g_i = \dot{g}_i = 0 \quad \text{for } \eta = \pm 1.$$

Nu er:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta^2}{\delta \xi^2} + \frac{\delta^2}{\delta \eta^2} \right] (\sigma_{2x} + \sigma_{2y}) &= \sum \ddot{f}_i \sigma_u^{(i)} + 2 \sum \ddot{f}_i \sigma_u^{(i+2)} \\ &+ \sum \dot{f}_i \sigma_u^{(i+4)} + \sum \ddot{g}_i \tau_u^{(i+1)} + 2 \sum \ddot{g}_i \tau_u^{(i+3)} + \sum g_i \tau_u^{(i+5)} = \\ &\ddot{f}_0 \sigma_u + (\ddot{f}_2 + 2 \ddot{f}_0) \sigma_u^{(2)} + \sum (\ddot{f}_{i+4} + 2 \ddot{f}_{i+2} + f_i) \sigma_u^{(i+4)} \\ &+ \ddot{g}_0 \tau_u^{(1)} + (\ddot{g}_2 + 2 \ddot{g}_0) \tau_u^{(3)} + \sum (\ddot{g}_{i+4} + 2 \ddot{g}_{i+2} + g_i) \tau_u^{(i+5)}. \end{aligned}$$

Ved at sammenholde denne ligning med (12), hvori vi har indsat $\sigma_o = \tau_o = 0$, ser vi, at betingelsen

$$\left[\frac{\delta^2}{\delta \xi^2} + \frac{\delta^2}{\delta \eta^2} \right] (\sigma_{1x} + \sigma_{2x} + \sigma_{1y} + \sigma_{2y}) = 0$$

medfører:

$$(17) \quad \begin{cases} \ddot{f}_0 = 3 \eta \\ \ddot{f}_2 = -\frac{1}{4} (2 + 3 \eta - \eta^3) - 2 \ddot{f}_0 \\ \ddot{f}_{i+4} = -f_i - 2 \ddot{f}_{i+2} \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} \ddot{g}_0 = 1 + 3 \eta \\ \ddot{g}_2 = -\frac{1}{4} (1 + \eta - \eta^2 - \eta^3) - 2 \ddot{g}_0 \\ \ddot{g}_{i+4} = -g_i - 2 \ddot{g}_{i+2}. \end{cases}$$

Ved hjælp af differentilligningerne (17) og (18) og randbetingelserne (16) kan funktionerne f_i og g_i uden principielle vanskeligheder bestemmes successivt.

I skema 1 er opført f_i og g_i sammen med de afledede til og med \ddot{f}_i og \ddot{g}_i for $i = 0, 2, 4$ og 6 . Endvidere er her angivet funktionsværdierne for $\eta = \pm 1$, d. v. s. ved bjælkens over- og underside.

Dersom vi i ligningerne (13) til (15) medtager alle funktionerne f_0, f_2, \dots, f_i , forsvinder bidraget til (5) fra σ_u og alle de afledede af σ_u til og med $\sigma_u^{(i)}$, og dersom vi medtager alle funktionerne g_0, g_2, \dots, g_i , forsvinder bidraget fra $\tau_u^{(1)}$ og alle de afledede af τ_u til og med $\tau_u^{(i+1)}$.

På denne måde kan vi finde den helt nøjagtige løsning, dersom σ_u og τ_u er polynomier i ξ (d. v. s. x).

Dette er tidligere gjort af Mesnager [2], som har vist, at en række todimensionale problemer kan løses ved at vælge en spændingsfunktion $\Phi(x, y)$, der er et polynomium i x og y og tillige tilfredsstiller ligningen:

$$\frac{\delta^4 \Phi}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 \Phi}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 \Phi}{\delta y^4} = 0.$$

Dersom man nu sætter:

$$\sigma_x = \frac{\delta^2 \Phi}{\delta y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} \quad \text{og} \quad \tau_{xy} = - \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x \delta y}$$

vil ligevægtsbetingelserne (3) og den geometriske betingelse (5) være identisk tilfredsstillende.

Randbetingelserne (4) kan ved passende valg af koefficienterne i Φ opfyldes, dersom belastningen er polynomier i x .

Den ovenfor beskrevne metode har interesse ved at være et overordentligt simpelt middel til bestemmelse af koefficienterne i spændingsfunktionen, idet denne dog ikke eksplicit opstilles.

Ved belastninger, der med tilstrækkelig god tilnærmelse kan »efterslignes« med polynomier i x , må man forvente at kunne finde gode tilnærmelser ved den angivne metode, og det må ved tilnærmelsesberegning anses for en fordel, at den resulterende løsning, således som her, er delt op i en række bidrag, der hver for sig opfylder ligevægtsbetingelser og randbetingelser.

Dersom belastningen virker på bjælkens overside, kan korrektionen til σ_{1x} etc. stadig findes af ligningerne (13) til (15), idet indeks u blot rettes til indeks o , og idet funktionerne f_i og g_i , jfr. ligning (12) og det ovenfor opstillede udtryk for $\left[\frac{\delta^2}{\delta \xi^2} + \frac{\delta^2}{\delta \eta^2} \right] (\sigma_{2x} + \sigma_{2y})$, bestemmes af differentiaalligningerne:

$$(17a) \quad \begin{cases} \ddot{f}_0 = -3\eta \\ \ddot{f}_2 = -\frac{1}{4}(2 - 3\eta + \eta^3) - 2\ddot{f}_0 \\ \ddot{f}_{i+4} = -f_i - 2\ddot{f}_{i+2} \end{cases}$$

$$(18a) \quad \begin{cases} \ddot{g}_0 = -1 + 3\eta \\ \ddot{g}_2 = \frac{1}{4}(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3) - 2\ddot{g}_0 \\ \ddot{g}_{i+4} = -g_i - 2\ddot{g}_{i+2} \end{cases}$$

medens randbetingelserne (16) stadig gælder.

Kalder vi de af (17a) og (18a) bestemte funktioner for f_{io} og g_{io} , og de af (17) og (18) bestemte for f_{iu} og g_{iu} , ser vi direkte, at f_{io} og g_{io} kan bestemmes ved:

$$(19) \quad \begin{cases} f_{io}(\eta) = f_{iu}(-\eta) \\ g_{io}(\eta) = -g_{iu}(-\eta) \end{cases}$$

hvorefter skema 1 også kan benyttes, når belastningen virker på bjælkens overside.

Ved koncentrerede belastninger kan den her beskrevne fremgangsmåde ikke direkte benyttes; men man må gå en omvej, som første gang er benyttet af *G. G. Stokes* ved undersøgelsen af spændingerne i en rektangulær bjælke i et lodret snit under en enkeltkraft [3].

Udgangspunktet er den af *Flamant* angivne meget simple løsning for en koncentreret belastning P på randen af en halvuendelig skive med tykkelsen 1 [4].

Løsningen lyder med betegnelserne på fig. 3:

$$(20) \quad \begin{cases} \sigma_r = -\frac{2P \cos \varphi}{\pi r} \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0. \end{cases}$$

Dersom nu en bjælke er belastet med en enkeltkraft, eller rettere sagt en liniebelastning vinkelret på bjælkens plan, kan man finde de resulterende spændinger ved først at tildele den spændingerne (20) og derefter tilføje en belastning, der er lig men modsat rettet de spændinger, som man finder langs undersiden og de to endeflader efter (20). Spændingerne i bjælken fra sidstnævnte belastning kan med første tilnærmelse beregnes efter de simple formler (9), (10) og (11) for σ_{1x} etc. Dette fører i det ovenfor omtalte tilfælde til samme løsning for σ_x , som angivet af *Stokes*, og løsningen er i det hele taget, jfr. det senere gennemregnede eksempel 1, temmelig nær ved den rigtige (angivet af *F. Seewald* [5]), hvilket også kunne forventes i betragtning af,

- 1) at løsningen nærmer sig den rigtige i den umiddelbare omegn af enkeltkraften, hvor spændingerne (20) er alt overvejende,
- 2) at løsningen nærmer sig den rigtige i punkter, der ligger så langt (ca. bjælkehøjden) fra enkeltkraften, at σ_x varierer lineært i η , således som forudsat,
- 3) at ligevægtsbetingelserne er identisk opfyldt i ethvert punkt af bjælken.

Det viser sig jfr. eksempel 1, at et forsøg på at forbedre tilnærmelsen ved hjælp af korrektionerne σ_{2x} etc. efter formlerne (13), (14) og (15) ikke fører til det ønskede resultat, idet de afledede af belastningerne ikke aftager tilstrækkeligt hurtigt.

At det af *Timoshenko* angivne forløb af σ_x i snittet under en lodret enkeltkraft ([1], side 97) stemmer noget bedre med den nøjagtige løsning end *Stokes'* løsning, fordi han har medtaget den til f_0 svarende korrektion, må således betegnes som en tilfældighed.

Den simple løsning stemmer imidlertid for lodret belastning så godt med *Seewalds* løsning, navnlig i det lille område med de store spændinger, at den uden tvivl vil gøre udmærket fyldest ved en undersøgelse af brudrisikoen i omegnen af et punkt eller et område med koncentrerede belastninger, og det ligger da nær at antage, at den også vil kunne bruges ved skrå eller vandrette belastninger, for hvilke der, såvidt forfatterne bekendt, ikke kendes nogen nøjagtig løsning.

Dersom bjælken ikke er belastet med en enkeltkraft, men med en koncentreret belastning på et lille område, kan spændingerne i det halvuendelige rum findes ved integration af de simple spændinger (20), og spændingerne fra de belastninger, der må tilføjes langs randene for at genskabe den oprindelige belastning på bjælken, kan atter beregnes efter de simple formler (9), (10) og (11).

Anvendelse af tilnærmelsesløsningen ved koncentrerede belastninger.

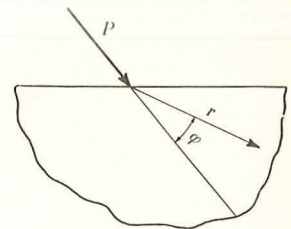


Fig. 3. Ved behandlingen af koncentrerede belastninger er udgangspunktet Flamants løsning (20) for en koncentreret belastning P på randen af en halvuendelig skive.

When considering concentrated loads the first step of the calculation is based upon Flamant's formula (20) for a line load P on the edge of a semi-infinite disk.

Belastninger, der virker i nærheden af bjælkens endeflader.

Vi har hidtil set bort fra randbetingelserne ved bjælkens endeflader og forudsat, at de betragtede punkter lå så langt fra disse, at disse randbetingelser ikke havde nogen indflydelse på spændingstilstanden.

Dersom dette ikke er tilfældet, kan man opdele beregningen i to tempi, idet man først tænker sig bjælken forlænget så meget (frit udkraget), at vederlaget ligger langt fra enden af den tænkte bjælke. Dernæst skæres den tænkte forlængelse bort, og de spændinger, der derved frigøres, påføres bjælkeenden som en ydre belastning.

Dette belastningstilfælde er indgående, omend tilnærmet, behandlet af Y. Guyon [6], der har opstillet tabeller for de spændinger, der forårsages af en enkeltkraft, virkende såvel vinkelret på som parallelt med endefladen og med angrebepunkt i en række forskellige punkter af denne. Ved hjælp af disse tabeller kan virkningen af en vilkårlig belastning findes ved numerisk integration.

Principielt kan spændingerne fra en belastning på endefladen også findes ved at kombinere *Flamants* løsning for det halvuendelige rum med en bestemmelse efter de ovenfor udviklede formler af de spændinger, som forårsages af den belastning, der må tilføjes på bjælkens over- og underside for at genskabe den oprindelige belastning.

Dette er gjort i nedenstående eksempel 3. Da belastningen på bjælkens over- og underside er af samme type som ved en enkeltkraft inde på bjælken, viser det sig, at den simple løsning σ_{1x} etc. er en ganske god tilnærmelse til den rigtige, og at løsningen ikke i praksis kan forbedres ved korrektionerne σ_{2x} etc.

* * *

Andre belastningstilfælde.

Det kan vedrørende anvendelsesmulighederne for de udviklede formler oplyses, at de har været søgt benyttet ved bestemmelsen af spændingerne i grænsefladen mellem to plader med forskellige elasticitetskoefficienter, når den ene plade udviste et lineært varierende svind i forhold til den anden.

Ved den fælles rand optræder ret store spændingskoncentrationer, som det på grund af meget dårlig konvergens viste sig umuligt at bestemme ved en Fourieranalyse.

Dersom man forudsætter gyldighed af Hookes lov, er det ikke vanskeligt ved hjælp af formlerne (9) til (11) og (13) til (15) at bestemme deformationerne af den nederste plades overside som funktioner af $M, N, T, \sigma_o, \sigma_o^{(2)}$ etc. samt $\tau_o^{(1)}, \tau_o^{(3)}$ etc., og på tilsvarende måde kan deformationerne af den øverste plades underside bestemmes.

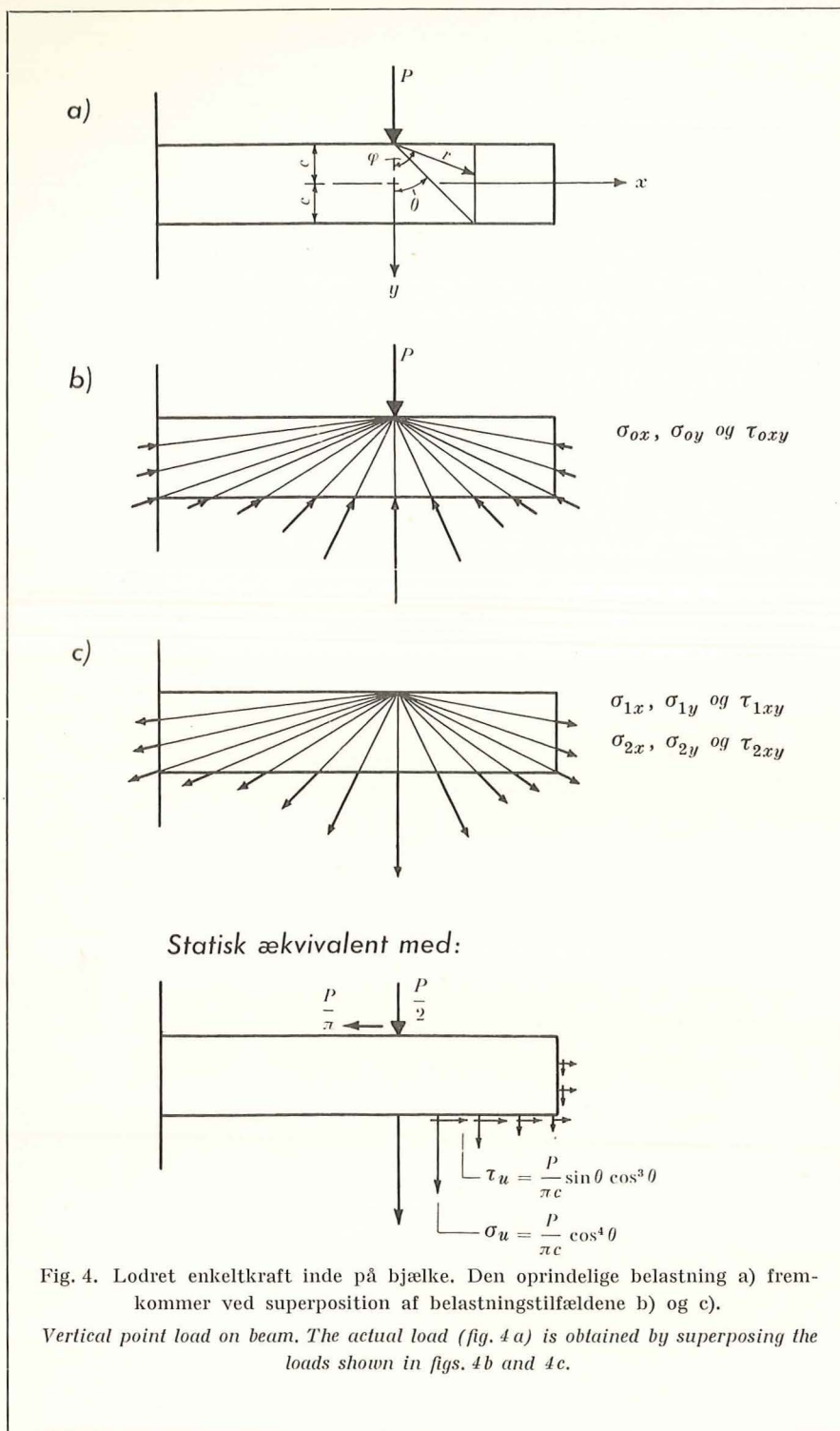
Da nu σ_o for den nederste plade er lig σ_u for den øverste o. s. v., og da visse deformationer i grænsefladen er identiske for de to plader, er det muligt at opstille to sammenhørende differentiaalligninger af typen:

$$\begin{aligned} \sum a_{2i} \sigma^{(2i)} + \sum b_{2i} \tau^{(2i+1)} &= e \\ \sum c_{2i} \sigma^{(2i)} + \sum d_{2i} \tau^{(2i+1)} &= f. \end{aligned}$$

Her er a_{2i} til d_{2i} konstanter, medens e og f er lineære i x , og ved at medtage flere og flere led ved løsningen skulle tilnærmelsen blive bedre og bedre.

Det viste sig imidlertid, at man ved denne fremgangsmåde fik bidrag til den homogene løsning, som ikke kunne være rigtige, f. eks. for $i = 3$ en ren sinusløsning, og metoden måtte opgives.

EKSEMPEL 1:
 LODRET ENKELTKRAFT
 INDE PÅ BJÆLKE



Som første eksempel skal behandles en lodret enkeltkraft på en bjælke, indspændt i den ene ende og fri i den anden, se fig. 4 a. Kraften forudsættes virkende ved bjælkens overside og inde på bjælken, d. v. s. i passende afstand fra dennes ender.

Den til Flamants løsning svarende påvirkning af bjælken er skitseret på fig. 4 b, hvor belastningen langs endeflader og underside altså er lig med spændingerne i de tilsvarende snit i den halvuendelige skive. Flamants løsning kan, jfr. (20), med betegnelserne i fig. 4 a skrives:

$$\begin{aligned}\sigma_{0x} &= -\frac{2P}{\pi r} \sin^2 \varphi \cos \varphi = -\frac{2P}{\pi c (1 + \eta)} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ \sigma_{0y} &= -\frac{2P}{\pi r} \cos^3 \varphi = -\frac{2P}{\pi c (1 + \eta)} \cos^4 \varphi \\ \tau_{0xy} &= -\frac{2P}{\pi r} \sin \varphi \cos^2 \varphi = -\frac{2P}{\pi c (1 + \eta)} \sin \varphi \cos^3 \varphi.\end{aligned}$$

For at få de resulterende spændinger skal man til *Flamants* løsning addere de spændinger, man får i bjælken, når denne langs endeflader og underside tænkes påført den samme belastning som ovenfor, men modsat rettet, se fig. 4c. Det sidstnævnte sæt spændinger beregnes ved hjælp af de ovenfor udviklede tilnærmelsesformler og betegnes i overensstemmelse hermed $\sigma_{1x} + \sigma_{2x}$, $\sigma_{1y} + \sigma_{2y}$ og $\tau_{1xy} + \tau_{2xy}$.

Vi vil indskrænke vore beregninger til et passende område fra kraftens angrebslinie og tilhøjre for denne. Da bjælken er indspændt i venstre ende og fri i højre, bliver den elementære bjælketeoris spændinger lig med 0 i dette område. De beregnede resulterende spændinger bliver således de tillæg til de elementære, der i almindelighed, d. v. s. også med andre understøtningsmåder, sammen med de elementære giver den særlige spændingsfordeling umiddelbart omkring enkeltkraften. Idet disse tillægsspændinger betegnes $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ og $\Delta\tau_{xy}$, haves altså:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_x &= \sigma_{0x} + \sigma_{1x} + \sigma_{2x} \\ \Delta\sigma_y &= \sigma_{0y} + \sigma_{1y} + \sigma_{2y} \\ \Delta\tau_{xy} &= \tau_{0xy} + \tau_{1xy} + \tau_{2xy}\end{aligned}$$

Idet vi herefter går over til bestemmelsen af σ_{1x} , σ_{1y} og τ_{1xy} samt σ_{2x} , σ_{2y} og τ_{2xy} , haves jfr. fig. 4:

$$\begin{aligned}N_0 &= \frac{P}{\pi} & T_0 &= P - \frac{P}{2} = \frac{P}{2} & M_0 &= -\frac{Pc}{\pi} \\ \sigma_o = \tau_o &= 0 & \sigma_u &= \frac{P}{\pi c} \cos^4 \theta & \tau_u &= \frac{P}{\pi c} \sin \theta \cos^3 \theta \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{1}{2} \xi.\end{aligned}$$

Heraf fås:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{d\xi} &= \frac{1}{2} \cos^2 \theta & \text{d. v. s.} \\ \frac{d\tau_u}{d\xi} &= \frac{P}{\pi c} (\cos^4 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \frac{\cos^2 \theta}{2} = \frac{P}{2\pi c} (-3 \cos^4 \theta + 4 \cos^6 \theta)\end{aligned}$$

(6) giver nu:

$$N = \frac{P}{\pi} \int_0^\theta \frac{P}{\pi c} \sin \alpha \cos^3 \alpha \cdot \frac{2c}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$= \frac{P}{\pi} \int_0^\theta \frac{2P}{\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \frac{P}{\pi} \cos^2 \theta$$

$$T = \frac{P}{2} \int_0^\theta \frac{2P}{\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{P}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \theta - \sin \theta \cos \theta \right).$$

Idet vi bemærker, at resultanten af σ_u og τ_u i ethvert punkt er rettet mod enkeltkraftens angrebepunkt, kan momentet M derefter bestemmes uden ny integration:

$$M = 2 \operatorname{tg} \theta \cdot c T - c N = \frac{P \cdot c}{\pi} [(\pi - 2\theta) \operatorname{tg} \theta - \sin^2 \theta - 1].$$

Ved hjælp af formlerne (9), (10) og (11) kan vi nu umiddelbart opskrive udtrykkene for spændingerne σ_{1x} , σ_{1y} og τ_{1xy} :

$$\sigma_{1x} = \frac{P}{2\pi c} [\cos^2 \theta + 3((\pi - 2\theta) \operatorname{tg} \theta - \sin^2 \theta - 1) \eta]$$

$$\tau_{1xy} = \frac{P}{4\pi c} \left[\left(\frac{3}{2}(\pi - 2\theta) - \sin \theta \cos^3 \theta - 3 \sin \theta \cos \theta \right) \right. \\ \left. + 2 \sin \theta \cos^3 \theta \cdot \eta + 3 \left(-\frac{1}{2}(\pi - 2\theta) + \sin \theta \cos^3 \theta \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \theta \cos \theta \right) \eta^2 \right]$$

$$\sigma_{1y} = \frac{P}{8\pi c} \cos^4 \theta [(5 - 4 \sin^2 \theta) + (7 - 4 \sin^2 \theta) \eta \\ - (1 - 4 \sin^2 \theta) \eta^2 - (3 - 4 \sin^2 \theta) \eta^3].$$

Vi har nu for tillægsspændingerne fået bestemt et sæt tilnærmelsesværdier, der tilfredsstiller ligevægtsbetingelserne (3) og randbetingelserne (4), men ikke den geometriske betingelse (5).

Tilbage står, som ovenfor udviklet, at forbedre tilnærmelsen ved at medtage de højere afledede af $\sigma = \sigma_u$ og $\tau = \tau_u$.

Vi har:

$$\frac{\pi c}{P} \sigma = \cos^4 \theta \quad \frac{\pi c}{P} \tau = \sin \theta \cos^3 \theta$$

$$\frac{\pi c}{P} \tau^{(1)} = \frac{\pi c}{P} \frac{d\tau}{d\xi} = -\frac{3}{2} \cos^4 \theta + 2 \cos^6 \theta.$$

Da det er de »lige« afledede af σ ($\sigma^{(0)}$, $\sigma^{(2)}$ o. s. v.) og de »ulige« afledede af τ , der indgår i formlerne (13), (14) og (15), og da såvel σ som $\tau^{(1)}$ er af formen $\cos^n \theta$ og atter bliver det ved differentiation to gange, vil vi først opstille det almene udtryk for den 2. afledede af funktionen $a_n = \cos^n \theta$.

$$\frac{da_n}{d\xi} = -n \cos^{n-1} \theta \sin \theta \frac{\cos^2 \theta}{2} = -\frac{n}{2} \cos^{n+1} \theta \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_n}{d\xi^2} &= -\frac{n}{2} [\cos^{n+2} \theta - (n+1) \cos^n \theta \sin^2 \theta] \frac{\cos^2 \theta}{2} \\ &= \frac{n}{4} [(n+1) \cos^{n+2} \theta - (n+2) \cos^{n+4} \theta]. \end{aligned}$$

Vi har altså differentiationsformlen:

$$\frac{d^2 a_n}{d\xi^2} = \frac{n}{4} [(n+1) a_{n+2} - (n+2) a_{n+4}].$$

I det foreliggende tilfælde haves:

$$\frac{\pi c}{P} \sigma = a_4 \quad \text{d. v. s.}$$

$$\frac{\pi c}{P} \sigma^{(2)} = \frac{4}{4} (5 a_6 - 6 a_8) = 5 a_6 - 6 a_8 \quad \text{d. v. s.}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi c}{P} \sigma^{(4)} &= \frac{5 \cdot 6}{4} (7 a_8 - 8 a_{10}) - \frac{6 \cdot 8}{4} (9 a_{10} - 10 a_{12}) \\ &= 52,5 a_8 - 168 a_{10} + 120 a_{12}. \end{aligned}$$

For $\xi = 0$, d. v. s. $\theta = 0$, får vi:

$$\frac{\pi c}{P} \sigma = 1$$

$$\frac{\pi c}{P} \sigma^{(2)} = 5 - 6 = -1$$

$$\frac{\pi c}{P} \sigma^{(4)} = 52,5 - 168 + 120 = 4,5.$$

Af differentiationsformlen ses endvidere umiddelbart, at vi for denne værdi af θ har:

$$\begin{aligned} \frac{\pi c}{P} \sigma^{(6)} &= -\frac{8}{4} 52,5 + \frac{10}{4} 168 - \frac{12}{4} 120 \\ &= -105 + 420 - 360 = -45. \end{aligned}$$

Tilsvarende haves:

$$\frac{\pi c}{P} \tau^{(1)} = -\frac{3}{2} a_4 + 2 a_6 \quad \text{d. v. s.}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi c}{P} \tau^{(3)} &= -\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} (5 a_6 - 6 a_8) + \frac{2 \cdot 6}{4} (7 a_8 - 8 a_{10}) \\ &= -\frac{15}{2} a_6 + 30 a_8 - 24 a_{10} \quad \text{d. v. s.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi c}{P} \tau^{(5)} &= -\frac{15 \cdot 6}{2 \cdot 4} (7 a_8 - 8 a_{10}) + \frac{30 \cdot 8}{4} (9 a_{10} - 10 a_{12}) \\ &\quad - \frac{24 \cdot 10}{4} (11 a_{12} - 12 a_{14}) \\ &= -78,75 a_8 + 630 a_{10} - 1260 a_{12} + 720 a_{14}. \end{aligned}$$

For $\xi = 0$, d.v.s. $\theta = 0$, får vi:

$$\frac{\pi c}{P} \tau^{(1)} = -\frac{3}{2} + 2 = 0,5$$

$$\frac{\pi c}{P} \tau^{(3)} = -\frac{15}{2} + 30 - 24 = -1,5$$

$$\frac{\pi c}{P} \tau^{(5)} = -78,75 + 630 - 1260 + 720 = 11,25$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi c}{P} \tau^{(7)} &= \frac{8}{4} 78,75 - \frac{10}{4} 630 + \frac{12}{4} 1260 - \frac{14}{4} 720 \\ &= 157,5 - 1575 + 3780 - 2520 = -157,5. \end{aligned}$$

Idet vi indskrænker os til at betragte σ_x i snittet $\xi = 0$, giver formel (13):

$$\begin{aligned} \frac{\pi c}{P} \sigma_{2x} &= \ddot{f}_0 - \ddot{f}_2 + 4,5 \ddot{f}_4 - 45 \ddot{f}_6 \dots\dots\dots \\ &\quad + 0,5 \ddot{g}_0 - 1,5 \ddot{g}_2 + 11,25 \ddot{g}_4 - 157,5 \ddot{g}_6 \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Størrelserne \ddot{f}_0, \ddot{f}_2 o.s.v. er opført i skema 1.

For $\eta = 0$ får vi således:

$$\begin{aligned} \frac{\pi c}{P} \sigma_{2x} &= 0 - 0,08333 + 4,5 \cdot 0,01945 - 45 \cdot 0,00123 \dots\dots\dots \\ &\quad - 0,5 \cdot 0,16667 + 1,5 \cdot 0,00139 + 11,25 \cdot 0,00608 \\ &\quad - 157,5 \cdot 0,00128 \dots\dots\dots \\ &= 0 - 0,0833 + 0,0875 - 0,0553 \dots\dots\dots \\ &\quad - 0,0833 + 0,0021 + 0,0684 - 0,2016 \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Det ses, at konvergenen er dårlig, idet vi for $i = 0, 2, 4$ og 6 får:

$$\frac{\pi c}{P} \sigma_{2x} = -0,0833, -0,1645, -0,0086 \text{ og } -0,2655.$$

For $\eta = 1$ haves:

$$\begin{aligned} \frac{\pi c}{P} \sigma_{2x} &= 0,20000 + 0,19810 - 4,5 \cdot 0,02436 - 45 \cdot 0,00046 \dots\dots\dots \\ &\quad + 0,5 \cdot 0,53333 + 1,5 \cdot 0,02031 - 11,25 \cdot 0,01083 \\ &\quad + 157,5 \cdot 0,00138 \dots\dots\dots \\ &= 0,2000 + 0,1981 - 0,1097 - 0,0207 \dots\dots\dots \\ &\quad + 0,2667 + 0,0305 - 0,1219 + 0,2175 \dots\dots\dots \end{aligned}$$

For $i = 0, 2, 4$ og 6 får vi altså:

$$\frac{\pi c}{P} \sigma_{2x} = 0,4667, 0,6953, 0,4637 \text{ og } 0,6605.$$

Udfaldet er som for $\eta = 0$, rækken konvergerer ikke.

Resultatet af ovenstående er altså, at vi i det foreliggende tilfælde ikke ad denne vej kan forbedre de først udregnede tilnærmelsesværdier.

I tabel 1 er for forskellige værdier af ξ og η opført spændingerne σ_{0x} , σ_{0y} , τ_{0xy} , σ_{1x} , σ_{1y} og τ_{1xy} (mærket henholdsvis 0 og 1) samt tillægsspændingerne $\Delta\sigma_x = \sigma_{0x} + \sigma_{1x}$, $\Delta\sigma_y = \sigma_{0y} + \sigma_{1y}$ og $\Delta\tau_{xy} = \tau_{0xy} + \tau_{1xy}$ (mærket Δ). I samme tabel er opført de af *F. Seewald* angivne værdier for $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ og $\Delta\tau_{xy}$ (mærket *S*). I tabellen er spændingerne kun opført for positive værdier af ξ . Når der skiftes fortegn på samtlige τ_{xy} -værdier, gælder tabellen imidlertid uforandret for negative værdier af ξ .

Når man forsøgs-mæssigt ønsker at bestemme en spændingsfordeling, kan dette ske ad fotoelastisk vej. På det fotoelastiske spændingsbillede er de sorte linier, som bekendt, niveaukurver til fladen $(p - q)$, hvor p og q er hovedspændingerne, og p er den absolut største. Udfra kendskabet til størrelsen $(p - q)$ i ethvert af forsøgslegemets punkter kan man derefter på forskellige måder regne sig frem til størrelsen af p og q .

På side 254 i [7] findes et sådant fotoelastisk spændingsbillede af en simpelt understøttet bjælke (længde = 6 · højden), belastet med en lodret enkeltkraft på midten. Billedet omfatter det midterste parti af bjælken, altså området omkring enkeltkraften.

Ved hjælp af den udarbejdede tabel over tillægsspændingerne vil vi beregne og konstruere det samme spændingsbillede, dels for at vise brugen af tabellen ved et beregningseksempel, og dels for at verificere tabelværdierne ved sammenligning af det konstruerede spændingsbillede med det virkelige.

Først beregnes de totale spændinger σ_x , σ_y og τ_{xy} i de tabellagte punkter:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{3M}{2c^2} \eta + \Delta\sigma_x \\ \sigma_y &= 0 + \Delta\sigma_y \\ \tau_{xy} &= \frac{3T}{4c} (1 - \eta^2) + \Delta\tau_{xy}.\end{aligned}$$

M og T er snitkræfterne, og første led i de tre spændingsudtryk er de elementære spændinger.

Derefter beregnes hovedspændingernes differens $(p - q)$ ved hjælp af den velkendte formel $(p - q) = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$, og for hvert af de betragtede tværsnit optegnes $(p - q)$ -kurven. Ved skæring af de optegnede kurver med de rette linier $(p - q) = k, 2k, 3k \dots$, hvor størrelsen af k fremgår af det virkelige spændingsbilledes data, fås punkter af de søgte niveaukurver, som derefter kan indtegnes.

Da en gengivelse af de her skitserede beregninger som helhed er uden interesse, skal vi nøjes med at anføre dem for et enkelt punkts

vedkommende, nemlig $(\xi, \eta) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Jfr. fig. 5 have:

$$M = \frac{11}{4} Pc \quad T = \frac{1}{2} P$$

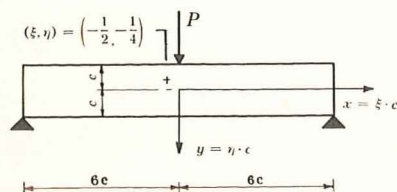


Fig. 5. Simpelt understøttet bjælke belastet på midten med en lodret enkeltkraft.

Simply supported beam loaded by point load at midspan.

Af tabel 1 får vi:

$$\Delta\sigma_x = 0,8 \frac{P}{15 \pi c} \quad \Delta\sigma_y = -14,1 \frac{P}{15 \pi c}$$

$$\Delta\tau_{xy} = 2,4 \frac{P}{15 \pi c} \quad \text{d.v.s.}$$

$$\sigma_x = \left(-\frac{3 \cdot 11 \cdot 15 \cdot \pi}{2 \cdot 4 \cdot 4} + 0,8 \right) \frac{P}{15 \pi c} = -47,8 \frac{P}{15 \pi c}$$

$$\sigma_y = -14,1 \frac{P}{15 \pi c}$$

$$\tau_{xy} = \left(\frac{3 \cdot 15 \cdot 15 \cdot \pi}{2 \cdot 4 \cdot 16} + 2,4 \right) \frac{P}{15 \pi c} = 19,0 \frac{P}{15 \pi c}$$

Heraf fås:

$$(p-q) = \sqrt{33,7^2 + 4 \cdot 19,0^2} \frac{P}{15 \pi c} = 50,8 \frac{P}{15 \pi c}.$$

På fig. 6 er resultatet af sammenligningen mellem det konstruerede og det virkelige fotoelastiske spændingsbillede gengivet. De ved beregningen bestemte punkter af niveaukurverne er indecirklede. Det fremgår af figuren, at beliggenheden i kraftens angrebslinie af de såkaldte isotrope punkter, d.v.s. punkter hvor $(p-q) = 0$, er så godt som identisk i de to spændingsbilleder, og at overensstemmelsen i det hele taget er tilfredsstillende.

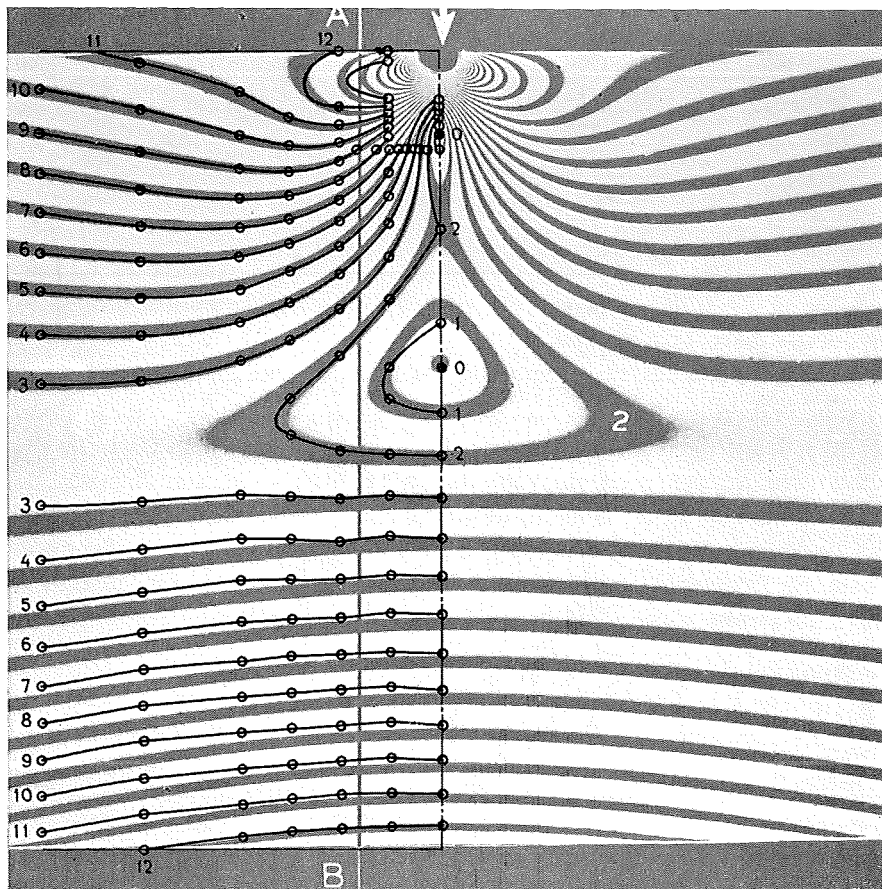


Fig. 6. Fotoelastisk spændingsbillede af bjælken på fig. 5 gengivet efter [7]. Indtegnet det beregnede spændingsbillede. Photoelastic stress pattern of beam shown in fig. 5 according to reference [7]. The calculated stress pattern is also shown.

EKSEMPEL 2:
 VANDRET ENKELTKRAFT
 INDE PÅ BJÆLKE

Som andet eksempel skal behandles en vandret enkeltkraft på en bjælke, indspændt i den ene ende og fri i den anden, se fig. 7 a. Forudsætninger, fremgangsmåde og ræsonnementer er som ovenfor i eksempel 1 med de modifikationer, der naturligt følger af, at kraften nu er vandret. I det følgende vil vi derfor indskrænke os til at gennemføre beregningerne uden nævneværdige kommentarer.

Flamants løsning, d. v. s. spændingerne i bjælken, når denne betragtes som et stykke af en halvuendelig skive, se fig. 7 b, kan i dette tilfælde skrives:

$$\begin{aligned}\sigma_{0x} &= -\frac{2P}{\pi r} \sin^3 \varphi = -\frac{2P}{\pi c(1+\eta)} \sin^3 \varphi \cos \varphi \\ \sigma_{0y} &= -\frac{2P}{\pi r} \sin \varphi \cos^2 \varphi = -\frac{2P}{\pi c(1+\eta)} \sin \varphi \cos^3 \varphi \\ \tau_{0xy} &= -\frac{2P}{\pi r} \sin^2 \varphi \cos \varphi = -\frac{2P}{\pi c(1+\eta)} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.\end{aligned}$$

Jfr. fig. 7 c har vi derefter til bestemmelsen af spændingerne σ_{1x} , σ_{1y} og τ_{1xy} :

$$\begin{aligned}N_0 &= P - \frac{P}{2} = \frac{P}{2} & T_0 &= \frac{P}{\pi} & M_0 &= -\frac{1}{2}Pc \\ \sigma_o &= \tau_o = 0 & \sigma_u &= \frac{P}{\pi c} \sin \theta \cos^3 \theta \\ \tau_u &= \frac{P}{\pi c} \sin^2 \theta \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

Jfr. eksempel 1 have desuden:

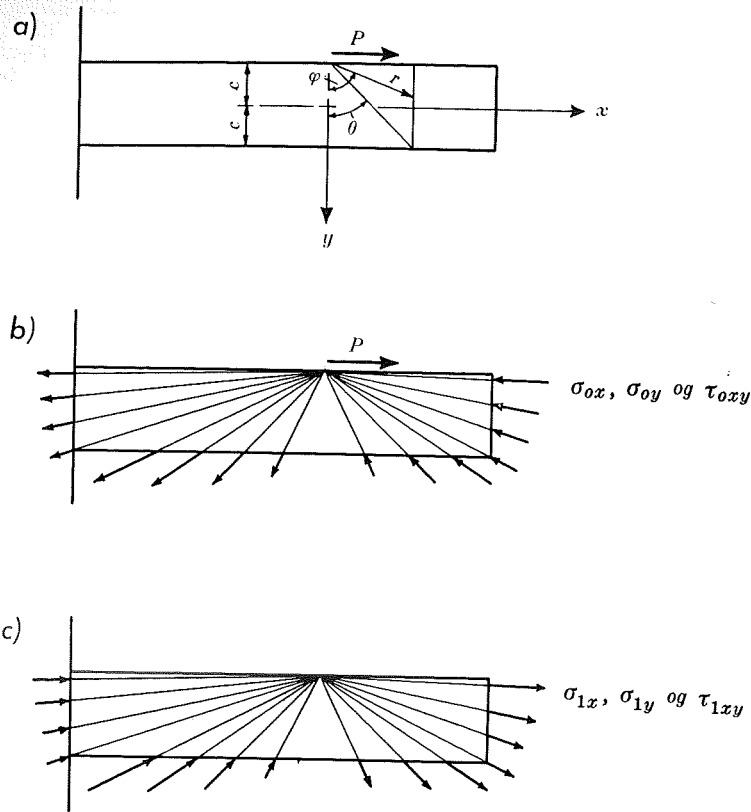
$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{d\xi} &= \frac{1}{2} \cos^2 \theta & \text{d. v. s.} \\ \frac{d\tau_u}{d\xi} &= \frac{P}{\pi c} (2 \sin \theta \cos^3 \theta - 2 \sin^3 \theta \cos \theta) \frac{\cos^2 \theta}{2} \\ &= \frac{P}{\pi c} \sin \theta \cos^3 \theta (1 - 2 \sin^2 \theta).\end{aligned}$$

(6) giver nu:

$$\begin{aligned}N &= -\int_0^\theta \frac{2P}{\pi} \sin^2 \alpha d\alpha + \frac{P}{2} = \frac{P}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \sin \theta \cos \theta \right) \\ T &= -\int_0^\theta \frac{2P}{\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha + \frac{P}{\pi} = \frac{P}{\pi} \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

Som i eksempel 1 kan momentet M , da resultanten af σ_u og τ_u i ethvert punkt er rettet mod enkeltkraftens angrebepunkt, umiddelbart opskrives uden ny integration:

$$M = 2 \operatorname{tg} \theta \cdot c \cdot T - c \cdot N = \frac{Pc}{\pi} \left(\sin \theta \cos \theta - \frac{\pi}{2} + \theta \right).$$



Statisk ækvivalent med:

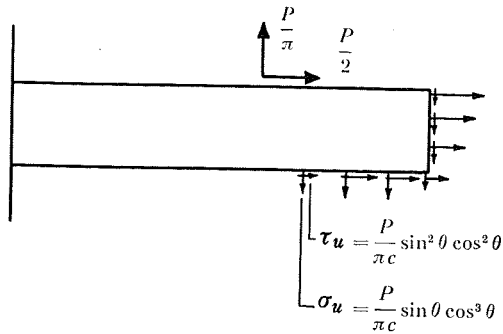


Fig. 7. Vandret enkeltkraft inde på bjælke. *Horizontal point load on beam.*

Formlerne (9), (10) og (11) giver derefter:

$$\sigma_{1x} = \frac{P}{2\pi c} \left[\frac{\pi}{2} - \theta + \sin \theta \cos \theta + 3 \left(\sin \theta \cos \theta - \frac{\pi}{2} + \theta \right) \eta \right]$$

$$\tau_{1xy} = \frac{P}{4\pi c} \cos^2 \theta (3 - \sin^2 \theta + 2 \sin^2 \theta \cdot \eta - 3 \cos^2 \theta \cdot \eta^2)$$

$$\sigma_{1y} = \frac{P}{4\pi c} \sin \theta \cos^3 \theta \left[(1 + 2 \cos^2 \theta) + 2(1 + \cos^2 \theta) \eta - (-1 + 2 \cos^2 \theta) \eta^2 - 2 \cos^2 \theta \cdot \eta^3 \right]$$

I tabel 2 er for de samme punkter i bjælken, som tabel 1 omfatter, opført spændingerne σ_{0x} etc. (mærket 0), σ_{1x} etc. (mærket 1) og $\Delta\sigma_x = \sigma_{0x} + \sigma_{1x}$ etc. (mærket Δ). Også her er spændingerne kun opført for positive værdier af ξ , men tabellen gælder uforandret for negative værdier af ξ , når der blot skiftes fortegn på samtlige σ_x - og σ_y -værdier.

Også for en vilkårligt rettet enkeltkraft er det nu en simpel sag at finde tillægsspændingerne. Kraften opløses blot i en lodret og vandret komponent, hvorefter de søgte tillægsspændinger fås som summen af komponenternes tillægsspændinger, der umiddelbart kan aflæses i de udarbejdede tabeller.

* * *

EKSEMPEL 3: ENKELTKRAFT VINKELRET PÅ BJÆLKES ENDEFLADE

Som tredje eksempel skal endelig behandles en enkeltkraft vinkelret på bjælkens endeflade, se fig. 8a.

Som ovenfor bemærket, kan man også i dette tilfælde gå frem på den måde, at man til *Flamants* løsning (σ_{0x} , σ_{0y} og τ_{0xy}), se fig. 8b, adderer de spændinger (σ_{1x} , σ_{1y} og τ_{1xy}), man ved hjælp af de ovenfor udviklede tilnærmelsesformler finder i bjælken, når denne langs over- og underside påføres en belastning lig med, men modsat rettet spændingerne i de tilsvarende snit i den halvuendelige skive, se fig. 8c.

Da beregningerne er fuldstændig analoge med de i eksemplerne 1 og 2 gennemførte, blot med den forskel at σ_0 og τ_0 nu er forskellige fra 0, skal vi her indskrænke os til at referere resultatet af vore beregninger, når kraften angriber i fjerdedelspunktet, d. v. s. for $a = \frac{1}{2}c$, se fig. 8.

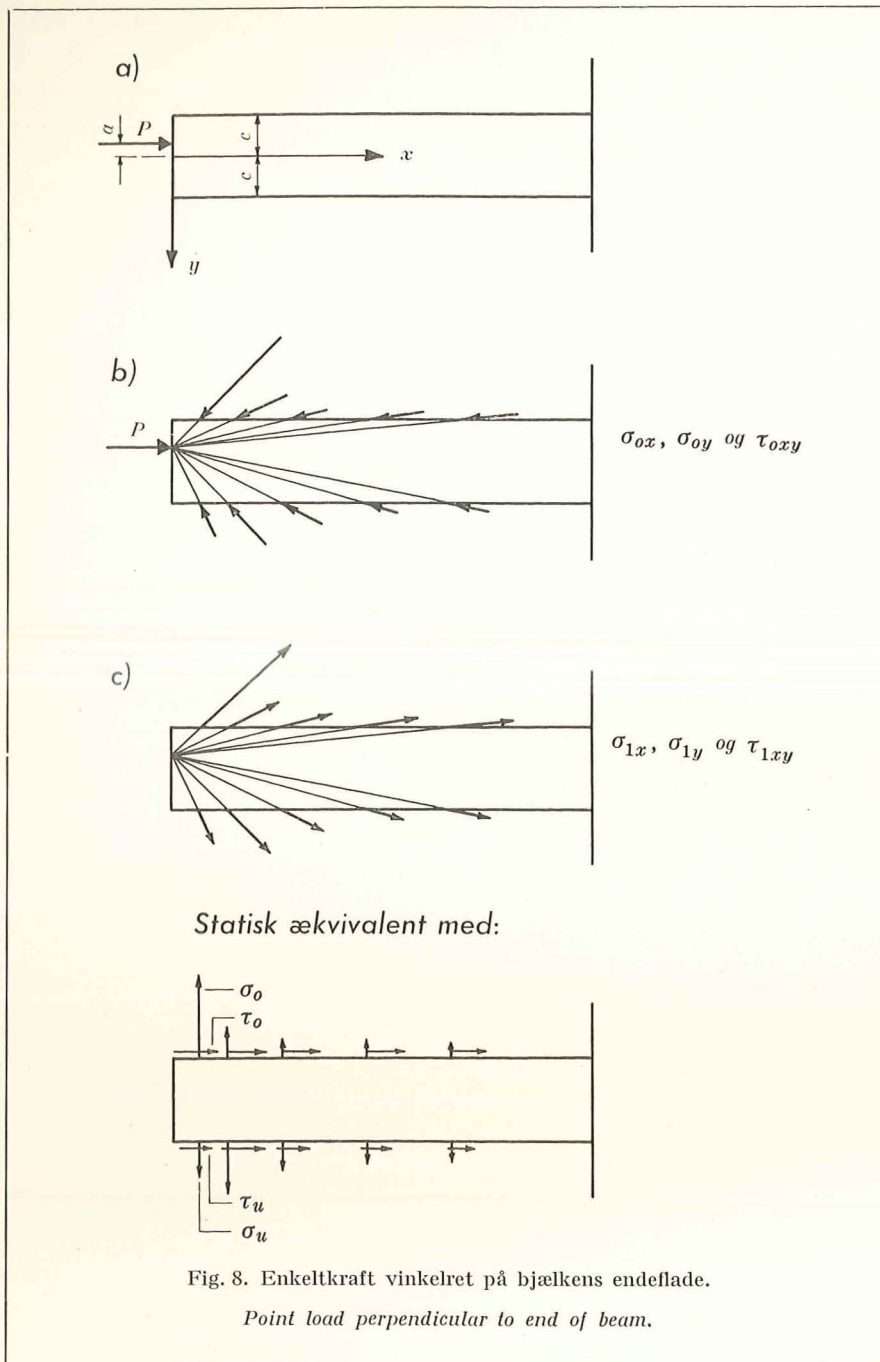
For dette specielle tilfælde har vi på samme måde som i eksempel 1 beregnet og konstrueret spændingsbilledet, og på fig. 9 er dette gengivet sammen med det virkelige fotoelastiske spændingsbillede, der er optaget på *Laboratoriet for Bygningsteknik*.

Overensstemmelsen mellem de to billeder, d. v. s. overensstemmelsen mellem den beregnede og den virkelige hovedspændingsdifferens ($p - q$), synes tilfredsstillende. Tilbage står spørgsmålet, hvorledes det forholder sig med summen af hovedspændingerne.

Tilnærmelsesløsningens ($p + q$)-værdier fås umiddelbart ved hjælp af den velkendte formel $(p + q) = (\sigma_x + \sigma_y)$. De »virkelige« ($p + q$)-værdier bestemmes ud fra det fotoelastiske spændingsbillede på følgende måde: Billedet giver os størrelsen ($p - q$) i ethvert punkt af forsøgsskiven, d. v. s. også på randene. Her er imidlertid den ene af hovedspændingerne lig med 0, således at $|p + q| = (p - q)$, idet p er den absolut største af hovedspændingerne. Vi kender altså summen af hovedspændingerne på randene og ved desuden, at denne i ethvert punkt skal tilfredsstillende (5):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] (p + q) = 0.$$

Denne ligning med kendte randværdier kan løses ved en iterationsmetode, f. eks. relaksation, der er anvendt her (angående relaksation kan henvises til [8]). Resultatet er gengivet i fig. 10, hvor tallene i parentes er tilnærmelsesløsningens ($p + q$)-værdier, og de andre er de på grundlag af fotografiet ved relaksation opnåede værdier.

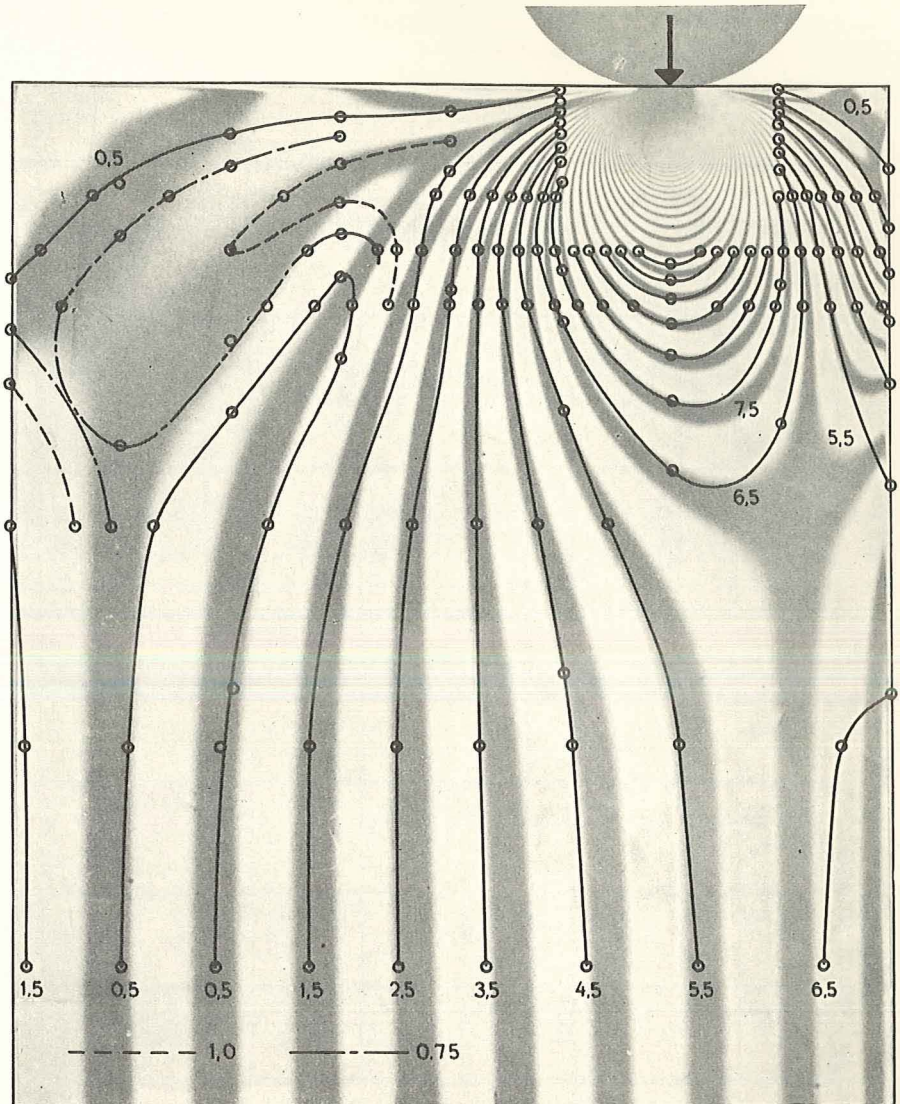


At de beregnede spændinger ikke stemmer helt overens med de virkelige, var naturligvis at vente, da den anvendte beregningsmetode er tilnærmet, men at overensstemmelsen for størrelsen $(p + q)$'s vedkommende er knap så god som for størrelsen $(p - q)$, kan muligvis også skyldes, at bestemmelsen af de »virkelige« $(p + q)$ -værdier udelukkende er baseret på fotografiets randværdier, som for det første ikke er så veldefinerede og for det andet kan tænkes lidt forvanskede af forsøgstekniske randforstyrrelser.

For dette belastningstilfælde er ikke udarbejdet tabeller, da dette, som ovenfor bemærket, allerede er gjort af Guyon, og ovenstående beregning, når kraften angriber i fjerdedelspunktet, blev kun gennemført for at verificere tilnærmelsesløsningen.

Fig. 9. Fotoelastisk spændingsbillede af bjælken på fig. 8 med ekscentriciteten $a = \frac{1}{2} c$. Indtegnet det beregnede spændingsbillede.

Photoelastic stress pattern of beam shown in fig. 8. Eccentricity a of load equal to $0.5 c$. The calculated stress pattern is also shown.



0	12	37	95	146	148	82	0	
(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	
12	9	0	-18	-85	-294	-916	-305	-7
(12)	(20)	(43)	(52)	(-11)	(-328)	(-524)	(-345)	(-72)
40	11	-28	-83	-173	-322	-508	-379	-263
(51)	(24)	(-18)	(-87)	(-207)	(-394)	(-524)	(-416)	(-254)
118	32	-46	-127	-216	-311	-402	-477	-576
(116)	(41)	(-49)	(-153)	(-268)	(-372)	(-445)	(-474)	(-461)
118	33	-52		-226		-405		-589
(132)	(44)	(-55)		(-253)		(-423)		(-530)
118	31	-56		-231		-409		-589
(132)	(37)	(-58)		(-247)		(-418)		(-557)

\leftarrow 1.5 c \leftarrow 0.5 c \rightarrow

Fig. 10. Summen af hovedspændingerne i bjælken på fig. 8. Tallene i parentes er beregnede ved at addere spændingerne (9), (10) og (11) til spændingerne efter Flamant's formel (20). De andre er bestemt på grundlag af fotografiet på fig. 9. Faktor: $\frac{P}{150 \pi c}$.

The figures indicate the sums of the principal stresses for the beam shown in fig. 8. Figures in brackets are calculated by adding the stresses (9), (10) and (11) to the stresses according to Flamant's formula (20). The other figures are based upon the photograph shown in fig. 9.

Multiplier: $\frac{P}{150 \pi c}$.

Skema 1: Koefficientskema for de funktioner, der indgår i formlerne (13), (14) og (15). Faktor 10^{-5} .

	Konstant	η	η^2	η^3	η^4	η^5	η^6	η^7	η^8	η^9	Σ lige	Σ ulige	$\eta = -1$	$\eta = 1$
$\overset{\dots}{f}_0$	0	300000	0	300000	-300000	300000
$\overset{\dots}{\dot{f}}_0$	-30000	0	150000	120000	0	120000	120000
$\overset{\dots}{\ddot{f}}_0$	0	-30000	0	50000	0	20000	-20000	20000
$\overset{\dots}{\ddot{\dot{f}}}_0$	2500	0	-15000	0	12500	0	0	0	0
$\overset{\dots}{f}_0$	0	2500	0	-5000	0	2500	0	0	0	0
$-2\overset{\dots}{\dot{f}}_0$	0	60000	0	-100000
	-50000	-75000	0	25000
$\overset{\dots}{f}_2$	-50000	-15000	0	-75000	-50000	-90000	40000	-140000
$\overset{\dots}{\dot{f}}_2$	3107	-50000	-7500	0	-18750	-4393	-68750	63457	-73143
$\overset{\dots}{\ddot{f}}_2$	8333	3107	-25000	-2500	0	-3750	-16667	-3143	-13524	-19810
$\overset{\dots}{\ddot{\dot{f}}}_2$	-304	8333	1554	-8333	-625	0	-625	0	0	0	0
$\overset{\dots}{f}_2$	-2083	-304	4166	518	-2083	-125	0	-89	0	0	0	0
$-2\overset{\dots}{\dot{f}}_2$	-16667	-6214	50000	5000	0	7500
$-f_0$	0	-2500	0	5000	0	-2500
$\overset{\dots}{f}_4$	-16667	-8714	50000	10000	0	5000	33333	6286	27047	39619
$\overset{\dots}{\dot{f}}_4$	618	-16667	-4357	16667	2500	0	833	-406	0	-406	-406
$\overset{\dots}{\ddot{f}}_4$	1945	618	-8333	-1452	4167	500	0	119	-2221	-215	-2006	-2436
$\overset{\dots}{\ddot{\dot{f}}}_4$	-44	1945	309	-2778	-363	833	83	0	15	..	0	0	0	0
$\overset{\dots}{f}_4$	-418	-44	973	103	-694	-73	139	12	0	2	0	0	0	0
$-2\overset{\dots}{\dot{f}}_4$	-3890	-1236	16667	2904	-8333	-1000	0	-238
$-f_2$	2083	304	-4166	-518	2083	125	0	89
$\overset{\dots}{f}_6$	-1807	-932	12500	2386	-6250	-875	0	-149	4443	430	4013	4873
$\overset{\dots}{\dot{f}}_6$	52	-1807	-466	4167	597	-1250	-146	0	-19	..	18	1110	-1092	1128
$\overset{\dots}{\ddot{f}}_6$	123	52	-904	-155	1042	119	-208	-21	0	-2	53	-7	60	46
$\overset{\dots}{\ddot{\dot{f}}}_6$	-4	123	26	-301	-39	208	20	-30	-3	0	0	0	0	0
$\overset{\dots}{f}_6$	-18	-4	62	9	-75	-8	35	3	-4	0	0	0	0	0

Skema 1: Koefficientskema for de funktioner, der indgår i formlerne (13), (14) og (15). Faktor 10^{-5} .

	Konstant	η	η^2	η^3	η^4	η^5	η^6	η^7	η^8	η^9	Σ lige	Σ ulige	$\eta = -1$	$\eta = 1$
\ddot{g}_0	100000	300000	100000	300000	-200000	400000
\dot{g}_0	-30000	100000	150000	120000	100000	20000	220000
\ddot{g}_0	-16667	-30000	50000	50000	33333	20000	13333	53333
\dot{g}_0	2500	-16667	-15000	16667	12500	0	0	0	0
g_0	4167	2500	-8333	-5000	4167	2500	1	0	1	1
$-2\ddot{g}_0$	33333	60000	-100000	-100000
	-25000	-25000	25000	25000
\ddot{g}_2	8333	35000	-75000	-75000	-66667	-40000	-26667	-106667
\dot{g}_2	-1892	8333	17500	-25000	-18750	-3142	-16667	13525	-19809
\ddot{g}_2	-139	-1892	4167	5833	-6250	-3750	-2222	191	-2413	-2031
\dot{g}_2	113	-139	-946	1389	1458	-1250	-625	0	0	0	0
g_2	-69	113	-70	-315	347	292	-208	-89	0	1	-1	1
$-2\ddot{g}_2$	278	3784	-8333	-11667	12500	7500
$-g_0$	-4167	-2500	8333	5000	-4167	-2500
\ddot{g}_4	-3889	1284	0	-6667	8333	5000	4444	-383	4827	4061
\dot{g}_4	-24	-3889	642	0	-1667	1667	833	-216	-2222	2006	-2438
\ddot{g}_4	608	-24	-1945	214	0	-333	278	119	-1059	-24	-1035	-1083
\dot{g}_4	-1	608	-12	-648	54	0	-56	40	15	..	0	0	0	0
g_4	-147	-1	304	-4	-162	11	0	-8	5	2	0	0	0	0
$-2\ddot{g}_4$	-1216	48	3890	-428	0	667	-556	-238
$-g_2$	69	-113	70	315	-347	-292	208	89
\ddot{g}_6	-1147	-65	3960	-113	-347	375	-348	-149	2118	346	1772	2464
\dot{g}_6	6	-1147	-33	1320	-28	-69	63	-50	-19	..	-11	54	-65	43
\ddot{g}_6	128	6	-574	-11	330	-6	-12	9	-6	-2	-134	-4	-130	-138
\dot{g}_6	0	128	3	-191	-3	66	-1	-2	1	-1	0	0	0	0
g_6	-27	0	64	2	-48	-1	11	0	0	0	0	1	-1	1

KONCENTREREDE BELASTNINGER PÅ BJÆLKER MED REKTANGULÆRT TVÆRSNIT

Tabel 1: Tillægsspændingerne for lodret enkeltkraft på bjælke. Faktor $\frac{P}{15\pi c}$

		$\eta_r = 0$			$\eta_r = \frac{1}{8}$			$\eta_r = \frac{1}{4}$			$\eta_r = \frac{3}{8}$			$\eta_r = \frac{1}{2}$			$\eta_r = \frac{3}{4}$			$\eta_r = 1$		
		σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}
$\eta = -1$	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	1	30.0	0.0	0.0	25.8	0.0	0.0	22.1	0.0	0.0	18.9	0.0	0.0	16.0	0.0	0.0	11.4	0.0	0.0	8.1	0.0	0.0
	Δ	25.8	0.0	0.0	22.1	0.0	0.0	18.9	0.0	0.0	16.0	0.0	0.0	11.4	0.0	0.0	8.1	0.0	0.0
	S	29.0	21.1	14.7	10.1	7.5
$\eta = -\frac{7}{8}$	0	0.0	-240.0	0.0	-60.0	-60.0	-60.0	-38.4	-9.6	-19.2	-21.6	-2.4	-7.2	-13.3	-0.8	-3.3	-6.3	-0.2	-1.1	-3.4	-0.1	-0.4
	1	27.2	0.3	4.1	23.5	0.3	3.7	20.2	0.2	3.3	17.4	0.2	2.9	14.9	0.1	2.5	10.8	0.1	1.8	7.8	0.1	1.4
	Δ	27.2	-239.7	4.1	36.5	59.7	56.3	18.2	9.4	15.9	4.2	2.2	4.3	1.6	-0.7	-0.8	4.5	-0.1	0.7	4.4	0.0	1.0
	S
$\eta = -\frac{3}{4}$	0	0.0	-120.0	0.0	-19.2	-76.8	-38.4	-30.0	-30.0	-30.0	-25.6	-11.4	-17.0	-19.2	-4.8	-9.6	-10.8	-1.2	-3.6	-6.6	-0.4	-1.7
	1	24.4	0.8	7.7	21.3	0.8	6.9	18.4	0.8	6.1	16.0	0.8	5.4	13.8	0.7	4.7	10.2	0.6	3.4	7.6	0.4	2.5
	Δ	24.4	-119.2	7.7	2.1	76.0	31.5	11.6	29.2	23.9	9.6	10.6	11.6	5.4	4.1	4.9	0.6	0.6	0.2	1.0	0.0	0.8
	S
$\eta = -\frac{1}{2}$	0	0.0	-60.0	0.0	-3.3	-53.2	-13.3	-9.6	-38.4	-19.2	-13.8	-24.6	-18.4	-15.0	-15.0	-15.0	-12.8	-5.7	-8.5	-9.6	-2.4	-4.8
	1	18.8	3.0	13.3	16.7	3.0	11.9	14.7	2.9	10.6	13.1	2.8	9.4	11.5	2.6	8.2	9.0	2.1	6.2	7.1	1.6	4.5
	Δ	18.8	-57.0	13.3	13.4	50.2	1.4	5.1	35.5	8.6	0.7	21.8	9.0	3.5	12.4	6.8	3.8	3.6	2.3	2.5	0.8	0.3
	S	20.2	-57.9	13.2	-7.0	-38.9	-7.1	-6.6	-12.3	-6.2	-3.8	-2.2	-2.1	-2.3	-0.6	0.1
$\eta = -\frac{1}{4}$	0	0.0	-40.0	0.0	-1.1	-37.9	-6.3	-3.6	-32.4	-10.8	-6.4	-25.6	-12.8	-8.5	-19.2	-12.8	-10.0	-10.0	-10.0	-9.2	-5.2	-6.9
	1	13.1	6.0	16.6	12.1	6.0	15.0	11.1	5.8	13.4	10.2	5.5	11.8	9.3	5.1	10.4	7.8	4.1	7.9	6.5	3.2	5.9
	Δ	13.1	-34.0	16.6	11.0	31.9	8.7	7.5	26.6	2.6	3.8	20.1	1.0	0.8	14.1	2.4	2.2	5.9	2.1	2.7	2.0	1.0
	S
$\eta = -\frac{1}{8}$	0	0.0	-34.3	0.0	-0.7	-33.0	-4.7	-2.4	-29.3	-8.4	-4.5	-24.5	-10.5	-6.3	-19.6	-11.1	-8.3	-11.3	-9.8	-8.3	-6.4	-7.3
	1	10.3	7.7	17.4	9.8	7.7	15.7	9.2	7.4	14.1	8.7	7.0	12.5	8.2	6.5	11.1	7.2	5.3	8.5	6.3	4.1	6.4
	Δ	10.3	-26.6	17.4	9.1	25.3	11.0	6.8	21.9	5.7	4.2	17.5	2.0	1.9	13.1	0.0	1.1	6.0	1.3	2.0	2.3	0.9
	S
$\eta = 0$	0	0.0	-30.0	0.0	-0.5	-29.1	-3.6	-1.7	-26.6	-6.6	-3.2	-23.1	-8.6	-4.8	-19.2	-9.6	-6.9	-12.3	-9.2	-7.5	-7.5	-7.5
	1	7.5	9.4	17.7	7.5	9.4	16.1	7.4	9.0	14.4	7.3	8.5	12.8	7.1	8.0	11.5	6.6	6.6	8.8	6.0	5.1	6.8
	Δ	7.5	-20.6	17.7	7.0	19.7	12.5	5.7	17.6	7.8	4.1	14.6	4.2	2.3	11.2	1.9	0.3	5.7	0.4	1.5	2.4	0.7
	S	5.7	-21.5	17.7	4.2	18.5	8.0	1.0	11.8	2.1	1.2	5.7	0.1	1.8	1.8	0.4
$\eta = \frac{1}{2}$	0	0.0	-20.0	0.0	-0.1	-19.7	-1.6	-0.5	-18.9	-3.2	-1.1	-17.7	-4.4	-1.8	-16.2	-5.4	-3.2	-12.8	-6.4	-4.3	-9.6	-6.4
	1	-3.8	14.8	13.3	-1.7	14.7	12.4	0.1	14.1	11.5	1.5	13.5	10.7	2.7	12.6	9.8	4.2	10.5	8.3	4.9	8.4	6.9
	Δ	-3.8	-5.2	13.3	-1.8	5.0	10.8	-0.4	4.8	8.3	0.4	4.2	6.3	0.9	3.6	4.4	1.0	2.3	1.9	0.6	1.2	0.5
	S	-6.4	-6.8	13.2	-4.0	5.6	8.0	-0.2	4.0	3.6	1.0	1.9	0.8	1.0	-1.0	-0.1
$\eta = 1$	0	0.0	-15.0	0.0	-0.1	-14.9	-0.9	-0.2	-14.5	-1.8	-0.5	-14.0	-2.6	-0.8	-13.3	-3.3	-1.6	-11.5	-4.3	-2.4	-9.6	-4.8
	1	-15.0	15.0	0.0	-10.8	14.9	0.9	-7.3	14.5	1.8	-4.3	14.0	2.6	-1.8	13.3	3.3	1.8	11.5	4.3	3.9	9.6	4.8
	Δ	-15.0	0.0	0.0	-10.9	0.0	0.0	-7.5	0.0	0.0	-4.8	0.0	0.0	-2.6	0.0	0.0	0.2	0.0	0.0	1.5	0.0	0.0
	S	-6.3	0.6	4.1	3.0	2.0

Tabel 2: Tillægsspændingerne for vandret enkeltkraft på bjælke. Faktor $\frac{P}{15\pi c}$

		$\epsilon_r = 0$			$\epsilon_r = \frac{1}{8}$			$\epsilon_r = \frac{1}{4}$			$\epsilon_r = \frac{3}{8}$			$\epsilon_r = \frac{1}{2}$			$\epsilon_r = \frac{3}{4}$			$\epsilon_r = 1$		
		σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}
$\eta = -1$	0	-240.0	0.0	0.0	-120.0	0.0	0.0	-80.0	0.0	0.0	-60.0	0.0	0.0	-40.0	0.0	0.0	-30.0	0.0	0.0
	1	47.1	0.0	0.0	44.3	0.0	0.0	41.5	0.0	0.0	38.8	0.0	0.0	36.2	0.0	0.0	31.4	0.0	0.0	27.2	0.0	0.0
	Δ	-195.7	0.0	0.0	-78.5	0.0	0.0	-41.2	0.0	0.0	-23.8	0.0	0.0	-8.6	0.0	0.0	-2.8	0.0	0.0
$\eta = -\frac{7}{8}$	0	0.0	0.0	0.0	-60.0	-60.0	-60.0	-76.8	-19.2	-38.4	-64.8	-7.2	-21.6	-53.2	-3.3	-13.3	-37.9	-1.1	-6.3	-29.1	-0.4	-3.4
	1	42.7	0.0	2.6	40.2	0.0	2.6	37.8	0.0	2.5	35.4	0.0	2.5	33.1	0.1	2.3	28.9	0.1	2.2	25.2	0.1	1.9
	Δ	42.7	0.0	2.6	-19.8	-60.0	-57.4	-39.0	-19.2	-35.9	-29.4	-7.2	-19.1	-20.1	-3.2	-11.0	-9.0	-1.0	-4.1	-3.9	-0.3	-1.5
$\eta = -\frac{3}{4}$	0	0.0	0.0	0.0	-9.6	-38.4	-19.2	-30.0	-30.0	-30.0	-38.3	-17.0	-25.6	-38.4	-9.6	-19.2	-32.4	-3.6	-10.8	-26.6	-1.7	-6.6
	1	38.3	0.0	4.9	36.2	0.1	4.9	34.1	0.1	4.8	32.0	0.2	4.6	30.1	0.2	4.5	26.4	0.3	4.0	23.2	0.3	3.4
	Δ	38.3	0.0	4.9	26.6	-38.3	-14.3	4.1	-29.9	-25.2	-6.3	-16.8	-21.0	-8.3	-9.4	-14.7	-6.0	-3.3	-6.8	-3.4	-1.4	-3.2
$\eta = -\frac{1}{2}$	0	0.0	0.0	0.0	-0.8	-13.3	-3.3	-4.8	-19.2	-9.6	-10.4	-18.4	-13.8	-15.0	-15.0	-15.0	-19.2	-8.5	-12.8	-19.2	-4.8	-9.6
	1	29.4	0.0	8.5	28.0	0.2	8.4	26.6	0.5	8.3	25.3	0.6	8.0	23.9	0.8	7.7	21.5	1.0	6.9	19.2	1.1	6.0
	Δ	29.4	0.0	8.5	27.2	-13.1	5.1	21.8	-18.7	-1.3	14.9	-17.8	-5.8	8.9	-14.2	-7.3	2.3	-7.5	-5.9	0.0	-3.7	-3.6
$\eta = -\frac{1}{4}$	0	0.0	0.0	0.0	-0.2	-6.3	-1.1	-1.2	-10.8	-3.6	-3.2	-12.8	-6.4	-5.7	-12.8	-8.5	-10.0	-10.0	-10.0	-12.3	-6.9	-9.2
	1	20.6	0.0	10.6	19.9	0.5	10.5	19.2	0.9	10.3	18.5	1.3	10.0	17.8	1.5	9.7	16.5	1.9	8.7	15.3	2.0	7.6
	Δ	20.6	0.0	10.6	19.7	-5.8	9.4	18.0	-9.9	6.7	15.3	-11.5	3.6	12.1	-11.3	1.2	6.5	-8.1	-1.3	3.0	-4.9	-1.6
$\eta = -\frac{1}{8}$	0	0.0	0.0	0.0	-0.1	-4.7	-0.7	-0.7	-8.4	-2.4	-1.9	-10.5	-4.5	-3.6	-11.1	-6.3	-7.1	-9.8	-8.3	-9.5	-7.3	-8.3
	1	16.2	0.0	11.1	15.9	0.6	11.1	15.5	1.1	10.9	15.1	1.6	10.6	14.7	2.0	10.2	14.0	2.4	9.2	13.3	2.6	8.2
	Δ	16.2	0.0	11.1	15.8	-4.1	10.4	14.8	-7.3	8.5	13.2	-8.9	6.1	11.1	-9.1	3.9	6.9	-7.4	0.9	3.8	-4.7	-0.1
$\eta = 0$	0	0.0	0.0	0.0	-0.1	-3.6	-0.5	-0.4	-6.6	-1.7	-1.2	-8.6	-3.2	-2.4	-9.6	-4.8	-5.2	-9.2	-6.9	-7.5	-7.5	-7.5
	1	11.8	0.0	11.2	11.8	0.7	11.2	11.7	1.3	11.0	11.7	1.9	10.7	11.7	2.4	10.3	11.5	3.0	9.5	11.3	3.1	8.4
	Δ	11.8	0.0	11.2	11.7	-2.9	10.7	11.3	-5.3	9.3	10.5	-6.7	7.5	9.3	-7.2	5.5	6.3	-6.2	2.6	3.8	-4.4	-0.9
$\eta = \frac{1}{2}$	0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.6	-0.1	-0.1	-3.2	-0.5	-0.3	-4.4	-1.1	-0.6	-5.4	-1.8	-1.6	-6.4	-3.2	-2.9	-6.4	-4.3
	1	-5.9	0.0	8.5	-4.5	1.0	8.4	-3.2	2.1	8.4	-1.8	2.9	8.3	-0.6	3.6	8.1	1.6	4.6	7.7	3.3	4.8	7.2
	Δ	-5.9	0.0	8.5	-4.5	-0.6	8.3	-3.3	-1.1	7.9	-2.1	-1.5	7.2	-1.2	-1.8	6.3	0.0	-1.8	4.5	0.4	-1.6	2.9
$\eta = 1$	0	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.9	-0.1	0.0	-1.8	-0.2	-0.1	-2.6	-0.5	-0.2	-3.3	-0.8	-0.6	-4.3	-1.6	-1.2	-4.8	-2.4
	1	-23.6	0.0	0.0	-20.8	0.9	0.1	-18.0	1.8	0.3	-15.4	2.7	0.5	-12.9	3.3	0.8	-8.4	4.3	1.6	-4.6	4.8	2.4
	Δ	-23.6	0.0	0.0	-20.8	0.0	0.0	-18.0	0.0	0.1	-15.5	0.1	0.0	-13.1	0.0	0.0	-9.0	0.0	0.0	-5.8	0.0	0.0

With reference to the beam (or strip of slab) shown in Fig. 1 the author arrives at formulae (9), (10), and (11) from which readily is obtained a set of stresses σ_{1x} , τ_{1xy} , and σ_{1y} satisfying the equations of equilibrium in all points of the beam and, for $y = \pm c$, the edge conditions. The edge conditions for $x = 0$ are also satisfied provided absence of loading on the section $x = 0$. Further, a set of corrective values σ_{2x} , τ_{2xy} , and σ_{2y} are introduced which without influencing the equations of equilibrium and edge conditions already satisfied result in the geometrical condition

$$\left[\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \right] (\sigma_{1x} + \sigma_{2x} + \sigma_{1y} + \sigma_{2y}) = 0$$

being satisfied for subsequently higher derivatives of the external loading on the beam.

σ_{2x} etc. may be determined by means of formulae (13), (14), and (15), the functions $f_i(\eta)$ and $g_i(\eta)$ involved being determined by means of the differential equations (17) and (18) or (17a) and (18a) with edge conditions (16).

In Scheme 1, pag. 22, f_i and g_i are listed together with the derivatives up to $f_i^{(6)}$ and $g_i^{(6)}$ for $i = 0, 2, 4$, and 6 .

Thus the computation of stresses is fairly simple if the external loading on the beam can be expressed or approximated by polynomials in x .

The application of the method in cases of concentrated loads is discussed and illustrated by numerical examples.

It is seen that for the type of loading mentioned the improvement of the simple solution σ_{1x} etc. by the corrective values σ_{2x} etc. is not feasible and, incidentally, that such improvement would not be of great practical consequence as in the case considered the simple solution appears to give sufficiently accurate results.

With reference to a vertical and a horizontal concentrated force acting on the beam Tables 1 and 2 respectively give the additional stresses $\Delta\sigma_x$ etc. i. e. the additions to the elementary beam stresses which together with the latter result in the particular distribution of stresses immediately around the concentrated force.

The tables are based upon the expressions of stresses formulated in the numerical examples and in Example 1 the use of them is shown.

SUMMARY

- [1] S. TIMOSHENKO: Theory of Elasticity, First edition, New York and London 1934.
- [2] A. MESNAGER: Compt. rend., vol. 132, side 1475, Paris 1901.
- [3] G. G. STOKES: Mathematics and Physics Papers, vol. 5, side 238.
- [4] FLAMANT: Compt. rend., vol. 114, side 1465, Paris 1892.
- [5] F. SEEWALD: Abh. aerodynam. Inst., Tech. Hochschule, Aachen, vol. 7, side 11, 1927.
- [6] Y. GUYON: Mémoires, Association Internationale des Ponts et Charpentes, vol. 11, side 165, Zürich 1951.
- [7] MAX MARK FROCHT: Photoelasticity, vol. 1, New York 1949.
- [8] R. V. SOUTHWELL: Relaxation Methods in Theoretical Physics, Oxford 1949.

LITTERATURFØRTEGNELSE

PLANLAGTE PUBLIKATIONER
I MONTAGEBYGGERI-SERIEN

omhandler følgende emner:

- Udvalg 1. *Montagebyggeriets
nrværende stude.*
- Udvalg 2. *Kuldebroer. (Publ. nr. 2).
Fugttransport i ydervægge.
Facadeelementers rationelle
opbygning og virkemåde.*
- Udvalg 3. *Skiver opbygget af elementer. (Publ. nr. 1).
Bæreevne af tværbelastede,
indstøbte bolte.

Koncentrerede belastninger på
bjælker. (Publ. nr. 5).*
- Udvalg 4. *Fuger. (Publ. nr. 4).
Samling af elementer,
specielt betonelementer.

Byggeriets nøjagtighed. (Publ. nr. 6).
Statistik, målinger fra praksis,
betonelementer, forme, råbygningen.

Installationer.
Modulordningen. (Publ. nr. 3).*